SOLUSI POLINOMIAL TAYLOR PERSAMAAN DIFERENSIAL-BEDA LINEAR DENGAN KOEFISIEN VARIABEL

Siti Nurjanah[1*], Musraini M[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

[*]nur7anah212@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses how to obtain the Taylor polynomial solution of a higher order linear differential and difference equation with variable coefficients whose initial conditions are known. The process begins by assuming the solution of a higher order linear differential and difference equation in the form of polynomial Taylor. Then it is followed by presenting this equation and its initial conditions in the form of a matrix. This matrix is changed into an augmented matrix. Taylor polynomial solutions of a higher order linear differential and difference equations is obtained by solving the augmented matrix using elementary row operations.

Keywords: *Linear differential and difference equations, Taylor polynomials.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas cara mendapatkan solusi polinomial Taylor dari persamaan diferensial-beda linear orde tinggi dengan koefisien variabel yang kondisi awalnya diketahui. Prosesnya dimulai dengan mengasumsikan solusi persamaan diferensial-beda linear orde tinggi dalam bentuk polinomial Taylor, kemudian menyajikan persamaan diferensial-beda linear orde tinggi beserta kondisi awalnya ke bentuk matrik, dilanjutkan dengan mengubah sistem persamaan ini dibentuk matriks *augmented*. Solusi polinomial Taylor dari persamaan diferensial-beda linear diperoleh dengan menyelesaikan matriks *augmented* menggunakan operasi baris elementer.

Kata kunci: *Persamaan diferensial-beda linear, polinomial Taylor.*

1. PENDAHULUAN

Matematika banyak diterapkan di berbagai bidang ilmu dan banyak permasalahan yang muncul dalam bidang sains dan teknologi yang berkaitan dengan persamaan diferensial dan persamaan beda. Misalnya dalam bidang fisika dibahas mengenai kecepatan dan percepatan, dalam bidang kimia mengenai laju reaksi dan dalam bidang biologi mengenai laju pertambahan populasi [2, h. 9], [1, h. 57-117].

Permasalahan yang telah disebutkan di atas tidak mudah ditemukan solusi analitiknya, sehingga diperlukan solusi numerik. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas bagaimana mendapatkan solusi dari persamaan diferensial-beda linear dengan koefisien variabel yang bentuk umumnya adalah

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{p} P_{kj}(x)y^{(k)}(x-\tau_{kj}) = f(x), \tau_{kj} \geq 0, \tag{1}$$

dengan kondisi awal

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{R} c_{ik}^{r} y^{(k)}(c_r) = \lambda i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \;\; a \leq c_r \leq b, \tag{2}$$

dengan $P_{kj}(x)$ dan $f(x)$ adalah fungsi yang mempunyai turunan pada suatu interval $a \leq x \leq b$, dan c_{ik}^{r}, c_r, c, τ_{kj} adalah sebuah koefisien konstan.

Pada artikel ini, persamaan (1) dengan kondisi awal persamaan (2) diselesaikan dengan memisalkan solusi $y(x)$ berupa deret Taylor dan mentransformasikan-nya dalam bentuk matriks sehingga diperoleh solusi polinomial Taylor persamaan (1). Pembahasan ini merupakan review dari artikel Mehmet Sezer dan Aysegul Akyuz Dascioglu yang berjudul *Taylor Polynomial Solutions of General Linear Differential-Difference Equations with Variable Coefficients* [3].

Untuk pembahasan ini dibagian dua, dibahas bagaimana mentransformasikan persamaan diferensial-beda linear dengan koefisien variabel dalam bentuk matriks dan teknik menyelesaikan matriks tersebut sehingga diperoleh solusi persamaan (1). Pada bagian tiga diberikan dua contoh persamaan diferensial-beda linear yang diselesaikan dengan menggunakan metode yang dipaparkan pada bagian dua.

2. SOLUSI POLINOMIAL TAYLOR

Asumsikan solusi dari persamaan (1) dapat disajikan sebagai deret Taylor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x-c)^n, \; a \leq x, c \leq b, \tag{3}$$

dengan koefisien Taylor

$$a_n = \frac{y^{(n)}(c)}{n!}, \; n = 0, 1, \ldots, N \tag{4}$$

harus ditentukan.

Persamaan (1), (2) dan (3) dapat dirubah dalam bentuk matriks. Asumsikan fungsi $y(x)$ dan turunan ke k terhadap x dapat diekspansikan dengan menggunakan deret Taylor di sekitar $x = c$ dalam bentuk

$$y^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x-c)^n, \tag{5}$$

dimana untuk $k = 0$, $y^{(0)}(x) = y(x)$ dan $a_n = a_n^{(0)}$. Selanjutnya turunkan persamaan (5) terhadap x sehingga diperoleh

$$y^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{(k)}(x-c)^{n-1}. \tag{6}$$

Kemudian ganti n dengan $n+1$, sehingga persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$y^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}^{(k)}(x-c)^n. \tag{7}$$

Berdasarkan persamaan (5) diperoleh

$$y^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k+1)}(x-c)^n. \tag{8}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (7) dan (8), diperoleh hubungan antara koefisien $a_n^{(k)}$ pada $y^{(k)}(x)$ dan $a_n^{(k+1)}$ pada $y^{(k+1)}(x)$ sebagai berikut

$$a_n^{(k+1)} = (n+1)a_{n+1}^{(k)}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{9}$$

Misalkan $n = 0, 1, \dots, N$, sehingga dengan menggunakan persamaan (9) diperoleh

$$A^{(k+1)} = MA^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{10}$$

dengan

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_0^{(k+1)} \\ a_1^{(k+1)} \\ a_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_N^{(k+1)} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_0^{(k)} \\ a_1^{(k)} \\ a_2^{(k)} \\ \vdots \\ a_N^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Berdasarkan persamaan (10) diperoleh

$$A^{(k)} = M^k A, \ k = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{12}$$

dengan

$$A^{(0)} = A = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T,$$

Selanjutnya, persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$y(x) = XA,$$

dengan

$$X = [1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N], \tag{13}$$

dan

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T. \tag{14}$$

Kemudian, turunan dari persamaan (3) yang telah diberikan pada persamaan (5) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$y^{(k)}(x) = XA^{(k)}, \tag{15}$$

dengan $A^{(k)}$, X seperti persamaan (11) dan (13). Selanjutnya, substitusikan persamaan (12) ke persamaan (15) diperoleh

$$y^{(k)}(x) = XM^kA. \tag{16}$$

Berdasarkan persamaan (3), bentuk $y^{(k)}(x-\tau_{kj})$ pada persamaan (1) dapat ditulis

$$y^{(k)}(x-\tau_{kj}) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}(x-c)^{n-q}(-\tau_{kj})^q a_n^{(k)}. \tag{17}$$

Sehingga, persamaan (17) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$y^{(k)}(x-\tau_{kj}) = XT(\tau_{kj})A^{(k)},$$

dengan $T(\tau_{kj})$ merupakan matriks satuan untuk $(\tau_{kj}) = 0$ dan untuk $(\tau_{kj}) \neq 0$ yaitu

$$T(\tau_{kj}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(-\tau_{kj})^0 & \binom{1}{1}(-\tau_{kj})^1 & \binom{2}{2}(-\tau_{kj})^2 & \cdots & \binom{N}{N}(-\tau_{kj})^N \\ 0 & \binom{1}{0}(-\tau_{kj})^0 & \binom{2}{1}(-\tau_{kj})^1 & \cdots & \binom{N}{N-1}(-\tau_{kj})^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0}(-\tau_{kj})^0 & \cdots & \binom{N}{N-2}(-\tau_{kj})^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{0}(-\tau_{kj})^0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

dan $A^{(k)}$, X seperti persamaan (11) dan (13).

Kemudian, dengan mengalikan $(x-c)^i$ ke persamaan (17) diperoleh

$$(x-c)^i y^{(k)}(x-\tau_{kj}) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}(x-c)^{n-q+i}(-\tau_{kj})^q a_n^{(k)}, \tag{19}$$

sehingga, persamaan (19) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$(x-c)^i y^{(k)}(x-\tau_{kj}) = XI_iT(\tau_{kj})A^{(k)},\ i = 0,1,\ldots,N. \tag{20}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (12) ke persamaan (20), sehingga diperoleh

$$(x-c)^i y^{(k)}(x-\tau_{kj}) = XI_iT(\tau_{kj})M^kA,\ i=0,1,\ldots,N, \tag{21}$$

dengan M^k, X, A seperti persamaan (11), (13), (14), $T(\tau_{kj})$ seperti persamaan (18) dan

$$I_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \ldots,\ I_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Kemudian, asumsikan fungsi $f(x)$ pada persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$f(x) = XF, \tag{23}$$

dengan X seperti persamaan (13),

$$f_n = \frac{y^{(n)}(c)}{n!},\ n=0,1,\ldots,N, \tag{24}$$

dan

$$F = [f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_N]^T. \tag{25}$$

Asumsikan fungsi $P_{kj}(x)$ yang telah diberikan pada persamaan (1), dapat diekspansikan dalam bentuk deret Taylor sebagai berikut

$$P_{kj}(x) = \sum_{i=0}^{N} p_{kj}^i (x-c)^i,\ k=0,1,\ldots,m,\ \ j=0,1,\ldots,p, \tag{26}$$

dengan

$$p_{kj}^i = \frac{P_{kj}^{(i)}(c)}{i!},\ i=0,1,\ldots,N. \tag{27}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (26) ke persamaan (1), diperoleh

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{N} p_{kj}^i (x-c)^i y^{(k)}(x-\tau_{kj}) = f(x). \tag{28}$$

Kemudian, substitusikan persamaan (21) dan (23) ke persamaan (28), sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{N} p_{kj}^i I_i T(\tau_{kj}) M^k A = F, \tag{29}$$

atau dapat ditulis

$$WA = F, \tag{30}$$

dengan

$$W = [w_{nh}] = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{N} p_{kj}^{i} I_i T(\tau_{kj}) M^k, \quad n, h = 0, 1, ..., N,$$

dan A, F seperti persamaan (14) dan (25).

Kemudian, asumsikan $y^{(k)}(c_r)$ pada persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$y^{(k)}(c_r) = C_r A^{(k)}, \tag{31}$$

substitusikan persamaan (31) ke persamaan (2), sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{R} c_{ik}^{r} C_r A^{(k)} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{32}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (12) ke persamaan (32), sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{R} c_{ik}^{r} C_r M^k A = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

dengan M^k, A seperti persamaan (11), (14) dan

$$C_r = [1 \;\; (c_r - c) \;\; (c_r - c)^2 \;\; \cdots \;\; (c_r - c)^N], \; r = 0, 1, \ldots, R, \; a \leq c_r \leq b.$$

Oleh karena itu, bentuk matriks pada persamaan (2) adalah

$$U_i A = \lambda_i, \tag{33}$$

dengan

$$U_i = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{R} c_{ik}^{r} C_r M^k = [u_{ij}], \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 0, 1, \ldots, N,$$

dan A seperti persamaan (14).

Selanjutnya untuk memperoleh solusi persamaan (1), matriks baris ke N pada persamaan (30) diganti dengan matriks U pada persamaan (33). Sehingga diperoleh matriks *augmented* sebagai berikut

$$[\widetilde{W}; \widetilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f_0 \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & f_{N-m} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & \cdots & u_{2N} & ; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m0} & u_{m1} & \cdots & u_{mN} & ; & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Jika rank $\widetilde{W}$ = rank $[\widetilde{W}; \widetilde{F}] = N+1$, maka untuk mendapatkan nilai koefisien Taylor A diperoleh

$$A = (\widetilde{W})^{-1}\widetilde{F}. \tag{34}$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan persamaan (34) koefisien Taylor yang tidak diketahui yaitu $a_0, a_1, \ldots, a_N$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pada persamaan (4) dapat diperoleh.

3. CONTOH KOMPUTASI

Contoh 1. Perhatikan persamaan diferensial-beda linear orde-1 sebagai berikut

$$y'(x) - x^2y(x) - xy'(x-1) + 2y(x-2) = -x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 3, \tag{35}$$

dengan kondisi awal

$$y(-1) = -1. \tag{36}$$

Penyelesaian

Berdasarkan persamaan (3), solusi dari persamaan (35) diberikan dalam bentuk polinomial Taylor derajat-2 sebagai berikut

$$y(x) = \sum_{n=0}^{2} a_n x^n. \tag{37}$$

Selanjutnya, dari persamaan (1) diperoleh $m = 1$, $p = 1$, $N = 2$, $P_{00}(x) = -x^2$, $\tau_{00} = 0$, $P_{01}(x) = 2$, $\tau_{01} = 2$, $P_{10}(x) = 1$, $\tau_{10} = 0$, $P_{11}(x) = -x$, $\tau_{11} = 1$. Berdasarkan persamaan (29), persamaan (35) dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{2} p_{kj}^{i} I_i T(\tau_{kj}) M^k A = F. \tag{38}$$

Kemudian, dengan menggunakan persamaan (27) diperoleh

$$\left.\begin{aligned}
p_{00}^0 &= p_{00}^1 = 0,\ p_{00}^2 = \frac{P_{00}^{(2)}(0)}{2!} = \frac{(-2)}{2!} = -1,\\
p_{01}^0 &= \frac{P_{01}^{(0)}(0)}{0!} = \frac{(2)}{0!} = 2,\ p_{01}^1 = p_{01}^2 = 0,\\
p_{10}^0 &= \frac{P_{10}^{(0)}(0)}{0!} = \frac{1}{0!} = 1,\ p_{10}^1 = p_{10}^2 = 0,\\
p_{11}^0 &= p_{11}^2 = 0,\ p_{11}^1 = \frac{P_{11}^{(1)}(0)}{1!} = \frac{-1}{1!} = -1.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Berdasarkan persamaan (11), (18) dan (21) diperoleh

$$T(\tau_{01}) = T(2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad T(\tau_{11}) = T(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (24) diperoleh nilai F yaitu

$$F = [3 \quad -3 \quad 1]^T. \quad (41)$$

Berdasarkan persamaan (38) diperoleh

$$-I_2T(\tau_{00}) + I_0T(\tau_{10})M + 2I_0T(\tau_{01}) - I_1T(\tau_{11})MA = F. \quad (42)$$

Kemudian substitusikan persamaan (39), (40) dan (41) ke persamaan (42) untuk $N = 2$, sehingga diperoleh

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 & ; 3 \\ 0 & 1 & -4 & ; -3 \\ -1 & 0 & 0 & ; 1 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Berdasarkan persamaan (33) diperoleh matriks *augmented* untuk kondisi awal persamaan (36) yaitu

$$U = [1 \quad -1 \quad 1 \quad ; \quad -1]. \quad (44)$$

Selanjutnya dengan mengganti baris terakhir matriks *augmented* pada persamaan (43) dengan matriks *augmented* U pada persamaan (44) diperoleh

$$[\widetilde{W}; \widetilde{F}] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 & ; 3 \\ 0 & 1 & -4 & ; -3 \\ 1 & -1 & 1 & ; -1 \end{bmatrix}.$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (34) diperoleh nilai koefisien Taylor yaitu

$$a_0 = -1, \; a_1 = 1, \; a_2 = 1. \quad (45)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (45) ke persamaan (37), sehingga diperoleh solusi dari persamaan (35) dalam bentuk polinomial Taylor derajat 2 sebagai berikut

$$y(x) = -1 + x + x^2. \quad (46)$$

Contoh 2. Diberikan persamaan diferensial-beda linear sebagai berikut

$$y''(x) - xy'(x-1) + y(x-2) = -x^2 - 2x + 5, \quad (47)$$

dengan kondisi awal

$$y(0) = -1, \;\; y'(-1) = -2. \quad (48)$$

Penyelesaian
Berdasarkan persamaan (3), solusi dari persamaan (47) diberikan dalam bentuk polinomial Taylor derajat-3 sebagai berikut

$$y(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n X^n. \quad (49)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh $m = 2,\ p = 0,\ N = 3,$ $P_{00}(x) = 1,\ \tau_{00} = 2,\ P_{10}(x) = -x,\ \tau_{10} = 1,\ P_{20}(x) = 1, \tau_{20} = 0.$
Berdasarkan persamaan (29), persamaan (47) dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{0}\sum_{i=0}^{3} p_{kj}^{i} I_i T(\tau_{kj}) M^k A = F. \tag{50}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (27) diperoleh

$$\left.\begin{array}{rl} p_{00}^{0} = & \dfrac{P_{00}^{(0)}(0)}{0!} = \dfrac{1}{0!} = 1,\ p_{00}^{1} = p_{00}^{2} = p_{00}^{3} = 0, \\ p_{10}^{0} = & p_{10}^{2} = p_{10}^{3} = 0,\ p_{10}^{1} = -1, \\ p_{20}^{0} = & 1,\ p_{20}^{1} = p_{20}^{2} = p_{20}^{3} = 0. \end{array}\right\} \tag{51}$$

Berdasarkan persamaan (11), (18) dan (21) diperoleh

$$T(\tau_{00}) = T(2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T(\tau_{10}) = T(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (24) diperoleh nilai F yaitu

$$F = [5 \quad -2 \quad -1 \quad 0]^T. \tag{53}$$

Berdasarkan persamaan (38) diperoleh

$$I_0 T(\tau_{00}) - I_1 T(\tau_{10}) M + I_0 T(\tau_{20}) M^2 A = F. \tag{54}$$

Substitusikan persamaan (51), (52) dan (53) ke persamaan (54), sehingga diperoleh

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -8 & ; & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 15 & ; & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ; & 0 \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Berdasarkan persamaan (33), kondisi awal pada persamaan (48) diperoleh

$$\left.\begin{array}{ll} U_1 & = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad -1], \\ U_2 & = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 3 \quad ; \quad -2]. \end{array}\right\} \tag{56}$$

Selanjutnya, dengan mengganti baris terakhir matriks *augmented* pada persamaan (55) dengan matriks *augmented* U_1 dan U_2 pada persamaan (56), diperoleh

$$[\widetilde{W};\widetilde{F}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -8 & ; & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 15 & ; & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & ; & -2 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, dengan menggunakan persamaan (34) diperoleh nilai koefisien Taylor yaitu

$$a_0 = -1, \ \ a_1 = 0, \ \ a_2 = 1, \ \ a_3 = 0. \tag{57}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (57) ke persamaan (49), sehingga diperoleh solusi dari persamaan (47) dalam bentuk polinomial Taylor derajat-3 sebagai berikut

$$y(x) = x^2 - 1. \tag{58}$$

Ucapan Terimakasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Imran M., M.Sc yang telah memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations, Third Edition.* Springer Science & Business Media, Inc., New York.

[2] Herdiana, H., Sukasno, & E. Kusmana. 2002. *Persamaan Diferensial.* Pustaka Setia, Jakarta.

[3] Sezer, M & A. A. Dascioglu. 2006. Taylor Polynomial Solutions of General Linear Differential-Difference Equations with Variable Coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 174:1526–1538.